Zahlentheorie

Aufgabe 1. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$, sodass $m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$ für alle positiven ganzen Zahlen n, m gilt.

Aufgabe 2. Gegeben sei eine positive ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeige, dass die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y) der Gleichung $x^2 + xy + y^2 = n$ endlich und durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 3. Für jede ganze Zahl $d > 0$ sei $f(d)$ die kleinste positive ganze Zahl, die genau d verschiedene positive Teiler hat. (Zum Beispiel gilt $f(1) = 1$, $f(5) = 16$, und $f(6) = 12$). Beweise, dass $f(2^k) \mid f(2^{k+1})$ für jede ganze Zahl $k \geq 0$ gilt.

Aufgabe 4. Betrachte das Polynom $P(x) = (x + d_1)(x + d_2) \cdot \dots \cdot (x + d_9)$, wobei $d_1, d_2, \dots, d_9$ neun verschiedene ganze Zahlen sind. Beweise, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle ganzen Zahlen $x \geq N$ die Zahl $P(x)$ einen Primfaktor größer als 20 hat.

Aufgabe 5. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen, die zu jedem Element der unendlichen Folge $a_n = 6^n + 3^n + 2^n - 1$ mit $n \geq 1$ teilerfremd sind.

Aufgabe 6. Sei $a_1, a_2, \dots$ eine Folge ganzer Zahlen, die sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Folgenglieder enthält. Für jede positive ganze Zahl n komme in der Menge $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ jede Restklasse modulo n genau einmal vor. Zeige, dass jede ganze Zahl genau einmal in der Folge $a_1, a_2, \dots$ vorkommt.

Aufgabe 7. Finde alle Paare positiver ganzer Zahlen (a, b), sodass $ab + a + b \mid a^2 + b^2 + 1$ gilt.

Aufgabe 8. Sei $f : \{1, 2, 3, \dots\} \to \{2, 3, \dots\}$ eine Funktion, die $f(n+m) \mid f(n) + f(m)$ für alle positiven ganzen Zahlen n, m erfüllt. Zeige, dass es eine ganze Zahl $c > 1$ gibt, sodass $c \mid f(n)$ für alle positiven ganzen Zahlen n gilt.

Zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 9 (Lifting the Exponent Lemma)**.** Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $p \neq 2$ eine ungerade Primzahl mit $a \equiv b \mod p$ und $a, b \not\equiv 0 \mod p$. Zeige (in dieser Reihenfolge):

(i) Wenn $p \nmid n$, dann gilt $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b)$.

(ii) $v_p(a^p - b^p) = v_p(a - b) + 1$.

(iii) $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n)$.

Hier bezeichnet $v_p(x)$ den Exponenten von p in der Primfaktorzerlegung von x. Zum Beispiel gilt $v_3(8) = 0, v_3(18) = 2$ und $v_5(30) = 1$.

Aufgabe 10 (Satz von Beatty)**.** Seien α und β positive irrationale Zahlen mit $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Beweise, dass die Mengen $A = \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \dots\}$ und $B = \{\lfloor \beta \rfloor, \lfloor 2\beta \rfloor, \lfloor 3\beta \rfloor, \dots\}$ die positiven natürlichen Zahlen partitionieren, das heißt $A \cup B = \{1, 2, 3, \dots\}$ und $A \cap B = \emptyset$.

Aufgabe 11 (Satz von Lucas)**.** Seien $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und p eine Primzahl. Zeige, dass

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{l} \binom{m_i}{n_i} \mod p$$

wobei $m = \sum_{i=0}^{l} m_i p^i$ und $n = \sum_{i=0}^{l} n_i p^i$ mit $m_i, n_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ die Darstellungen von m und n zur Basis p sind. Diese Darstellungen sind eindeutig bis auf die Anzahl der führenden Nullen. Hier ist der Binomialkoeffizient definiert als $\binom{x}{y} = |\{A \subseteq M_x : |A| = y\}|$, wobei M_x eine beliebige Menge mit $|M_x| = x$ ist.