Aufgaben Zahlentheorie

Aufgabe 1 (Aufgabe 60 in [2])**.** Sei $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen. Zeige, dass es eine unendliche Teilfolge gibt, in der entweder kein Folgenglied ein anderes teilt oder in der jedes Folgenglied alle darauffolgenden Folgenglieder teilt.

Aufgabe 2 (Aufgabe 121 in [2])**.** Sei p eine Primzahl und sei $a_1, \ldots, a_{p-1}$ eine Folge von ganzen Zahlen, sodass $\sum_{i \in I} a_i$ nicht durch p teilbar ist, wann immer I eine nichtleere Teilmenge von $\{1, \ldots, p-1\}$ ist. Zeige, dass alle Elemente der Folge in der gleichen Restklasse modulo p liegen.

Aufgabe 3 (IMO 2020 Shortlist N2)**.** Für jede Primzahl p gibt es das *Königreich von p-Landia*, das aus p Inseln besteht, die mit $1, 2, \ldots, p$ nummeriert sind (wobei keine zwei Inseln die gleiche Nummer haben). Zwei verschiedene Inseln mit den Nummern n und m sind genau dann durch eine Brücke verbunden, wenn $(n^2 - m + 1)(m^2 - n + 1)$ durch p teilbar ist. Die Brücken können zwar übereinander ragen, aber sie können sich nicht treffen. Beweise, dass es unendlich viele Primzahlen p gibt, für die es zwei Inseln in p-Landia gibt, die nicht durch eine Folge von Brücken miteinander verbunden sind.

Aufgabe 4. Sei $d \in \mathbb{Z}$ kongruent 0 oder 1 modulo 4. Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen p gibt, sodass d ein quadratischer Rest modulo p ist.

Aufgabe 5 (§1.6, Example 2 in [1])**.** Finde alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen der Gleichung $2^x - 1 = xy$.

Aufgabe 6 (2012 Japan MO, Final Round, Problem 3)**.** Sei p eine Primzahl. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, sodass für jedes $x \in \mathbb{Z}$ aus $p \mid x^n - 1$ sogar $p^2 \mid x^n - 1$ folgt.

Aufgabe 7 (§1.7, Example 3 in [1])**.** Sei M die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 - y^2 = z^3 - t^3$ mit $0 \leq x, y, z, t \leq 10^6$. Sei N die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 - y^2 = z^3 - t^3 + 1$ mit der gleichen Nebenbedingung. Beweise, dass $M > N$.

Aufgabe 8 (IMO 2021 Shortlist N6)**.** Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 2$ mit der folgenden Eigenschaft: Alle n paarweise verschiedenen ganzen Zahlen, deren Summe nicht durch n teilbar ist, können in irgendeine Reihenfolge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gebracht werden, sodass $1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \cdots + n \cdot a_n$ durch n teilbar ist.

Hinweis. Was passiert, wenn n eine Primzahl ist? Was passiert, wenn n eine gerade Zahl ist, die keine Zweierpotenz ist?

Zusatzaufgaben / Allgemeinwissen

Aufgabe 9 (Lifting-the-Exponent (LTE) Lemma)**.** Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $p \neq 2$ eine ungerade Primzahl mit $a \equiv b \mod p$ und $a, b \not\equiv 0 \mod p$. Zeige (in dieser Reihenfolge):

(i) Wenn $p \nmid n$, dann gilt $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b)$.

(ii) $v_p(a^p - b^p) = v_p(a - b) + 1$.

(iii) $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n)$.

Hier bezeichnet $v_p(x)$ den Exponenten von p in der Primfaktorzerlegung von x. Zum Beispiel gilt $v_3(8) = 0, v_3(18) = 2$ und $v_5(30) = 1$.

Es gibt auch ein LTE-Lemma für $p = 2$ (siehe z.B. Wikipedia oder überlege dir, wie sich der Beweis verändert, wenn p nicht ungerade ist).

Aufgabe 10 (Satz von Beatty)**.** Seien α und β positive irrationale Zahlen mit $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Beweise, dass die Mengen $A = \{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor 2\alpha\rfloor, \lfloor 3\alpha\rfloor, \dots\}$ und $B = \{\lfloor\beta\rfloor, \lfloor 2\beta\rfloor, \lfloor 3\beta\rfloor, \dots\}$ die positiven natürlichen Zahlen partitionieren, das heißt $A \cup B = \{1, 2, 3, \dots\}$ und $A \cap B = \emptyset$.

Aufgabe 11 (Satz von Lucas)**.** Seien $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und p eine Primzahl. Zeige, dass

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{l} \binom{m_i}{n_i} \mod p$$

wobei $m = \sum_{i=0}^{l} m_i p^i$ und $n = \sum_{i=0}^{l} n_i p^i$ mit $m_i, n_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ die Darstellungen von m und n zur Basis p sind. Diese Darstellungen sind eindeutig bis auf die Anzahl der führenden Nullen. Der Binomialkoeffizient $\binom{x}{y} \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ ist die Antwort auf folgende Frage: *Wie viele Teilmengen mit y Elementen hat eine Menge mit x Elementen?*

Quellen

1. Andreescu, T., Andrica, D., Cucurezeanu, I., 2010. An Introduction to Diophantine Equations: A Problem-Based Approach. Springer Science & Business Media.

2. Bollobás, B., 2022. The Art of Mathematics – Take Two: Tea Time in Cambridge. Cambridge University Press, Cambridge.