Spiele, Symmetrien und Invarianten

Seminar für ÖMO-Kursleiter:innen
Mariazell, 14. November 2023

Daniel Holmes[1]

Inhalt

1 Aufgabensammlung **1**

1.1 Zum Einstieg 1

1.2 Diophantische Gleichungen und Polynome 2

1.3 Schachbretter, Tabellen und Gitter 2

1.4 Spiele an der Tafel und Perlenketten 3

1.5 Spiele und Invarianten in der Ebene und im Raum 5

1.6 Ein verrückter Physiker 6

2 Lösungen **6**

1 Aufgabensammlung

Aufgaben ohne Quellenangabe wurden dem Autor als Folklore überliefert.

1.1 Zum Einstieg

Aufgabe 1. In einem Sack sind 99 rote und 99 schwarze Murmeln. Anna zieht zwei Murmeln aus dem Sack und

- legt eine rote Murmel in den Sack, falls die beiden gezogenen Murmeln die gleiche Farbe haben (beide rot oder beide schwarz), und
- legt eine schwarze Murmel in den Sack, falls die beiden gezogenen Murmeln unterschiedliche Farben haben.

Diesen Schritt wiederholt sie so lange, bis nur noch eine Murmel im Sack ist. Welche Farbe hat diese Murmel?

[Lav16, warm-up]

Aufgabe 2. Auf einer Party schütteln manche Leute Hände. Wir nennen eine Person *ungerade*, wenn sie mit einer ungeraden Anzahl anderer Gäste Hände geschüttelt hat. Beweise, dass auf jeder Party[2] eine gerade Anzahl von ungeraden Gästen anwesend ist.

[Lav16, problem 4]

[1] Institute of Science and Technology Austria (ISTA)

[2] Diese Angabe geht davon aus, dass auf jeder Party nur endlich viele Gäste anwesend sind. Daraus schließen wir, dass die Aufgabe nicht von den Stammgästen von *Hilberts Hotel* erfunden wurde.

Aufgabe 3. Am Anfang ist ein leerer Raum. Jede Minute betreten zwei neue Personen den Raum, oder eine Person verlässt den Raum. Ist es möglich, dass nach $3^{3^{3^3}}$ Minuten genau $3^{3^3}+1$ Personen im Raum sind?

[Lav16, problem 5]

Aufgabe 4. Eine Herde von 100 Kühen ist auf 4 Ställe aufgeteilt: 10 im Nordstall, 20 im Oststall, 30 im Südstall und 40 im Weststall. Die vier Ställe sind durch ein Tor verbunden, mit dem man drei Kühe aus einem Stall rausholen und gleichmäßig auf die drei anderen Ställe umverteilen kann. Zum Beispiel kann man drei Kühe aus dem Südstall rausholen und hat dann 11 Kühe im Nordstall, 21 Kühe im Oststall, 27 Kühe im Südstall und 41 Kühe im Weststall.

Beweise, dass wir mit diesem Tor die Kühe niemals gleichmäßig verteilen können, sodass 25 Kühe in jedem Stall sind.

[Lav16, problem 6]

1.2 Diophantische Gleichungen und Polynome

Aufgabe 5. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Beweise, dass die Gleichung $x^2 + xy + y^2 = n$ nur endlich viele Lösungspaare (x, y) mit $x, y \in \mathbb{Z}$ hat, und dass die Anzahl solcher Lösungspaare durch 6 teilbar ist.

[AAC10, §1.7, exercise 5]

Aufgabe 6. Emmy und Sophie spielen ein Spiel. Emmy denkt sich ein Polynom $P(X)$ mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten aus. Sophie darf sich eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ aussuchen und von Emmy den Wert $P(a)$ erfahren. Dann darf Sophie sich eine zweite Zahl $b \in \mathbb{Z}$ aussuchen und von Emmy den Wert $P(b)$ erfahren. Anschließend muss Sophie das ganze Polynom $P(X)$ erraten. Hat sie eine Gewinnstrategie?

[Zha07, problem 5]

Aufgabe 7. Sei M die Anzahl ganzzahliger Lösungstupel (x, y, z, t) der Gleichung

$$x^2 - y^2 = z^3 - t^3$$

mit $0 \leq x, y, z, t \leq 10^6$. Sei N die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x^2 - y^2 = z^3 - t^3 + 1$$

mit der gleichen Nebenbedingung. Man beweise, dass $M > N$ gilt.

(21. IMO Shortlist zitiert nach [AAC10, §1.7, example 4])

1.3 Schachbretter, Tabellen und Gitter

Aufgabe 8 (L-Steine)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Gegeben ist ein beliebig großer Vorrat an *L-Steinen* (also Steinen der Form) sowie ein $2^n \times 2^n$ Sachbrett, aus dem ein Feld entfernt wurde. Zeige, dass das Schachbrett mit L-Steinen bedeckt werden kann, sodass jedes Feld von genau einem Stein bedeckt ist. Das folgende Beispiel ist für $n = 2$, wobei das entfernte Feld mit X markiert ist.

Aufgabe 9. Ein 8×8 Schachbrett ist wie gewohnt in schwarz und weiß eingefärbt, aber das findet Kunibert langweilig. Also beschließt er, das zu ändern. Er kann jede Zeile, jede Spalte und jedes 2×2 Quadrat auswählen und die Farben darin invertieren, also die schwarzen Felder weiß und die weißen Felder schwarz einfärben. Zeige, dass es unmöglich ist, mit diesen Schritten ein Schachbrett mit 63 weißen und einem schwarzen Feld zu erzeugen.

Quelle von Aufgabe 9: [Eng98] zitiert nach [Lav16, problem 1]

Aufgabe 10. Alice und Bob spielen ein Spiel auf einem Streifen aus $n \geq 3$ Quadraten mit zwei Spielsteinen. Zu Beginn befindet sich der Stein von Alice auf dem ersten Feld und der Stein von Bob auf dem letzten Feld. Die Abbildung zeigt die Ausgangsstellung für einen Streifen von $n = 7$ Quadraten.

Ⓐ						Ⓑ

Gezogen wird abwechselnd. Ein Zug besteht darin, den eigenen Stein um ein oder um zwei Felder in Richtung des gegnerischen Steins auf ein leeres Feld zu versetzen, ohne den gegnerischen Stein zu überspringen. Alice macht mit ihrem Stein den ersten Zug. Verloren hat, wer keinen Zug mehr machen kann.

Für welche n kann Bob sicher gewinnen, egal wie Alice spielt? Für welche n kann Alice sicher gewinnen, egal wie Bob spielt?

(ÖMO JRW 2023)

Aufgabe 11. In jedem Feld einer rechteckigen Tabelle steht eine positive ganze Zahl. In jedem Zug darf Emmy alle Zahlen in einer Reihe verdoppeln oder alle Zahlen in einer Spalte um 1 verringern. Beweise, dass Emmy mit einer Folge solcher Züge eine Tabelle mit lauter Nullen erhalten kann.

[Eng98] zitiert nach [Lav16, problem 8]

Aufgabe 12. In einer 8×8 Tabelle sind sieben Felder schattiert. In jedem Zug schattieren wir jedes Feld, das zu Beginn des Zuges mindestens zwei schattierte Nachbarfelder hatte (horizontal oder vertikal). Beweise, dass dieser Prozess nicht damit enden kann, dass alle Felder schattiert sind.

[Lav16, problem 11]

Aufgabe 13. Das *15-Puzzle* ist ein Spiel mit 15 quadratischen Steinen in einem 4×4 Feld, die mit $1, 2, \ldots, 15$ beschriftet sind. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts schrieb Sam Loyd ein Preisgeld von 1000$ für die Person aus, die durch Verschieben der Steine von der linken zur rechten Konfiguration kommen konnte (also die Steine 14 und 15 vertauschen).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Beweise, dass dies unmöglich ist, sodass Sam Loyd das Preisgeld nie auszahlen musste.

(Folklore zitiert nach [Lav16, problem 9])

Hinweis. Aufgabe 20 könnte nützlich sein.

1.4 Spiele an der Tafel und Perlenketten

Aufgabe 14. Auf der Tafel stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 100$. Du darfst beliebige zwei Zahlen a und b auf der Tafel auswählen, weglöschen und durch $a + b - 1$ ersetzen. Nach 99 solchen Schritten steht nur noch eine Zahl auf der Tafel. Welche Zahl ist es?

[Lav16, problem 2]

Aufgabe 15. So wie Aufgabe 14, aber ersetze a und b stattdessen mit $ab + a + b$. Welche Zahl steht am Ende auf der Tafel?

[Lav16, problem 3]

Aufgabe 16. Ein Lehrer schreibt drei positive ganze Zahlen auf die Tafel und beauftragt Dima, eine davon um 3% zu verringern, eine andere um 4% zu verringern und die übrig gebliebene um 5% zu erhöhen. Dima schreibt die Ergebnisse in seinem Heft auf und bemerkt, dass er die gleichen drei Zahlen wie auf der Tafel aufgeschrieben hat, nur in einer anderen Reihenfolge. Beweise, dass Dima einen Rechenfehler gemacht haben muss.

(St. Petersburg zitiert nach [Lav16, problem 7])

Aufgabe 17. Arthur startet mit einer Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiver ganzer Zahlen auf der Tafel. Wenn möglich, wählt er zwei Indizes $j < k$ sodass $a_j \nmid a_k$ und ersetzt a_j durch $\mathrm{ggT}(a_j, a_k)$ und a_k durch $\mathrm{kgV}(a_j, a_k)$. Beweise, dass er diesen Prozess nur endlich oft wiederholen kann und, dass die zum Schluss erhaltene Folge unabhängig von seiner Auswahl der Indizes ist.

(Putnam 2008 zitiert nach [Lav16, problem 10])

Aufgabe 18. Auf einer Tafel stehen 17 ganze Zahlen, von denen keine durch 17 teilbar ist. Alice und Bob spielen ein Spiel, bei dem Alice beginnt und bei dem sie abwechselnd folgende Schritte durchführen:

- Alice sucht sich eine Zahl a auf der Tafel aus und ersetzt diese durch a^2.
- Bob sucht sich eine Zahl b auf der Tafel aus und ersetzt diese durch b^3.

Alice gewinnt, wenn nach endlich vielen Schritten die Summe der Zahlen auf der Tafel ein Vielfaches von 17 ist.

Man beweise, dass Alice immer den Sieg erzwingen kann.

(ÖMO BWV 2021)

Aufgabe 19. Auf einer Kette sind 2016 Perlen im Kreis angeordnet, von denen jede eine der Farben schwarz, blau oder grün hat. In jedem Schritt wird gleichzeitig jede Perle durch eine neue Perle ersetzt, wobei sich die Farbe der neuen Perle wie folgt bestimmt: Falls die beiden ursprünglichen Nachbarn dieselbe Farbe hatten, hat die neue Perle deren Farbe. Falls die Nachbarn zwei verschiedene Farben hatten, hat die neue Perle die dritte Farbe.

(a) Gibt es eine solche Kette, auf der die Hälfte der Perlen schwarz und die andere Hälfte grün ist, aus der man mit solchen Schritten eine Kette aus lauter blauen Perlen erhalten kann?

(b) Gibt es eine solche Kette, auf der tausend Perlen schwarz und die übrigen grün sind, aus der man mit solchen Schritten eine Kette aus lauter blauen Perlen erhalten kann?

(c) Ist es möglich, von einer Kette, die genau zwei benachbarte schwarze und sonst nur blaue Perlen enthält, mit solchen Schritten zu einer Kette zu kommen, die genau eine grüne und sonst nur blaue Perlen enthält?

(ÖMO BWF 2017)

Aufgabe 20. Auf der Tafel stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in dieser Reihenfolge. In jedem Schritt darf Sophie zwei Zahlen tauschen. Zum Beispiel darf sie, wenn $n = 6$, die Folge $1, 2, 3, 4, 5, 6$ durch $1, 2, 5, 4, 3, 6$ ersetzen, indem sie 3 und 5 tauscht. Beweise, dass sie mit einer ungeraden Anzahl solcher Schritte niemals zur ursprünglichen Reihenfolge zurückkehren kann.

Anmerkung. Aus dieser Aufgabe kann man das wichtige Konzept der *Signatur einer Permutation* ableiten. Eine *Permutation* ist eine Auflistung $a_1, \ldots, a_n$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in beliebiger Reihenfolge. Man kann jede Permutation erhalten, indem man mit $1, 2, \ldots, n$ startet schrittweise zwei Zahlen vertauscht. Aus Aufgabe 20 kann man nun Folgendes schlussfolgern: Sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Permutation von $1, 2, \ldots, n$, die sowohl durch eine Folge von k Vertauschungen als auch durch eine Folge von l Vertauschungen erreicht werden kann. Dann gilt $k \equiv l$ modulo 2. Die Zahl $(-1)^k$ ist also nur abhängig von der Permutation selbst, und wird daher als *Signatur der Permutation* bezeichnet.

1.5 Spiele und Invarianten in der Ebene und im Raum

Aufgabe 21 (3 Grashüpfer)**.** In einer Ebene sitzen drei Grashüpfer und bilden ein gleichseitiges Dreieck. In jeden Zug kann ein Grashüpfer über einen anderen springen, wobei seine Position an der des anderen reflektiert wird. Können die Grashüpfer so springen, dass sie irgendwann ein größeres regelmäßiges Dreieck bilden? Beweise deine Antwort.

Aufgabe 22 (4 Grashüpfer)**.** In einer Ebene sitzen vier Grashüpfer und bilden ein Quadrat. In jeden Zug kann ein Grashüpfer über einen anderen springen, wobei seine Position an der des anderen reflektiert wird. Können die Grashüpfer so springen, dass sie irgendwann ein größeres Quadrat bilden? Beweise deine Antwort.

Anmerkung. Was ist mit n Grashüpfern in einem regelmäßigen n-Eck? Für welche n können sie so hüpfen, dass sie irgendwann ein größeres regelmäßiges n-Eck bilden?

Aufgabe 23 (Euler-Charakteristik)**.** Vokabular für diese Aufgabe:

- *planarer Graph* ... eine Menge von Knoten und Kanten in der Ebene, wobei jede Kante zwei verschiedene Knoten verbindet und sich verschiedene Kanten nicht überschneiden dürfen. Zum Beispiel ist ein planarer Graph mit 7 Knoten und 8 Kanten.
- *Gebiete eines planaren Graphen* ... Jeder planare Graph zerlegt die Ebene in *Gebiete*, wobei das äußere Gebiet mitgezählt wird. Zum Beispiel hat der planare Graph drei Gebiete.
- *zusammenhängender Graph* ... ein Graph, in dem jedes Knotenpaar durch eine zusammenhängende Kantenfolge verbunden ist. Zum Beispiel ist verbunden, während hingegen nicht verbunden ist.

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit V Knoten, E Kanten, und F Gebieten, wobei das äußere Gebiet mitgezählt wird. Beweise, dass die folgende Gleichung gilt.

$$V - E + F = 2$$

Aufgabe 24 (Eulerscher Polyederformel)**.** Vokabular für diese Aufgabe:

- *Polyeder* ... ein dreidimensionaler Körper, der ausschließlich von ebenen Flächen begrenzt wird. Ein Beispiel ist der Tetraeder mit 4 Flächen, 6 Kanten und 4 Ecken.
- *konvexer Polyeder* ... ein Polyeder, sodass für alle Punkte A und B, die auf oder im Polyeder liegen, das Geradensegment AB vollständig im Polyeder enthalten ist.

Sei P ein konvexer Polyeder mit V Ecken, E Kanten und F Flächen. Beweise, dass die folgende Gleichung gilt.

$$V - E + F = 2$$

Aufgabe 25 (Satz von Pick)**.** Vokabular für diese Aufgabe:

- *einfaches Polygon* ... ein Polygon, das sich nicht selbst überschneidet (also zum Beispiel nicht).
- *Gitterpunkt* ... ein Punkt in der Ebene, dessen Koordinaten ganzzahlig sind.
- *Gitterpolygon* ... ein Polygon, dessen Ecken Gitterpunkte sind.

Sei nun P ein einfaches Gitterpolygon mit I Gitterpunkten im Inneren, R Gitterpunkten auf dem Rand und Flächeninhalt A. Man beweise, dass die folgende Gleichung gilt.

$$A = I + \frac{R}{2} - 1$$

Aufgabe 26. Sei G ein planarer Graph (siehe Aufgabe 23), in dem jeder Knoten entweder rot oder blau gefärbt ist. Man beweise, dass es einen Knoten v mit folgender Eigenschaft gibt: Betrachtet man die Nachbarn von v im Urzeigersinn, so ändert sich die Farbe höchstens zweimal.

[Sah21, exercise 7]

1.6 Ein verrückter Physiker

Aufgabe 27. Ein verrückter Physiker entdeckte eine neue Art von Teilchen, die er *Imonen* nannte, nachdem sie mysteriöserweise in seinem Labor auftauchten. Manche Imonenpaare können *verschränkt* sein, und jedes Imon kann mit beliebig vielen anderen Imonen verschränkt sein. Der Physiker hat einen Weg gefunden, folgende Operationen mit diesen Teilchen auszuführen (eine nach der anderen).

(i) Wenn ein Imon mit einer ungeraden Zahl von Imonen verschränkt ist, dann kann er es zerstören.

(ii) Zu jeder Zeit kann der Physiker die Menge der Imonen verdoppeln, indem er für jedes Imon I eine Kopie I' herstellt. Nach diesem Verfahren sind I' und J' genau dann verschränkt, wenn I und J verschränkt sind, und jedes I' ist mit seinem Original I verschränkt. Keine anderen Verschränkungen tauchen auf oder verschwinden im Laufe dieser Operation.

Man beweise, dass der Physiker eine Folge solcher Operationen ausführen kann, sodass in der resultierenden Menge von Imonen keine Verschränkungen mehr vorhanden sind.

(IMO Shortlist 2013 C3)

2 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1. Man prüft leicht nach, dass die Anzahl der schwarzen Murmeln modulo 2 in jedem Schritt gleich bleibt. Da anfangs 99 schwarze Murmeln im Sack waren, ist die Anzahl schwarzer Murmeln im Sack stets ungerade. Also muss auch die letzte verbleibende Murmel im Sack schwarz sein.

Lösung zu Aufgabe 2. Im Folgenden nennen wir zwei Personen auf der Party *befreundet*, wenn sie Hände geschüttelt haben. Sei $P_1, \ldots, P_n$ eine Liste der Personen auf der Party, und sei $N(P_i)$ die Anzahl der Personen auf der Party, die mit P_i befreundet sind. Sei außerdem F die Anzahl an Freundschaften auf der Party. Jede Freundschaft besteht aus zwei verschiedenen Personen, und eine Freundschaft zwischen P_i und P_j trägt jeweils 1 zu $N(P_i)$ und $N(P_j)$ bei. Daher trägt jede Freundschaft genau 2 zur Summe $N(P_1) + \cdots + N(P_n)$ bei und es gilt

$$2F = N(P_1) + \cdots + N(P_n).$$

Da die linke Seite gerade ist und alle Summanden auf der rechten Seite ganzzahlig sind, muss auf der rechten Seite eine gerade Anzahl von ungeraden Summanden vorkommen. Da P_i genau dann ein ungerader Gast ist, wenn $2 \nmid N(P_i)$, muss es also eine gerade Anzahl gerader Gäste geben.

Lösung zu Aufgabe 3. Da $2 \equiv -1 \pmod 3$, verändert sich die Anzahl an Personen im Raum jede Minute um $+2 \pmod 3$. Wären nach $3^{3^{3^{3}}}$ Minuten also genau $3^{3^3} + 1$ Personen im Raum, so müsste

$$3^{3^3} + 1 \equiv 2 \cdot 3^{3^{3^{3}}} \pmod 3$$

gelten. Die linke Seite ist aber kongruent 1 (mod 3), während die rechte Seite kongruent 0 (mod 3) ist. Das wäre ein Widerspruch, also ist es nicht möglich, dass nach $3^{3^{3^{3}}}$ Minuten genau $3^{3^3}+1$ Personen im Raum sind.

Lösung zu Aufgabe 4. Da $-1 \equiv +3 \pmod 4$, verändert sich bei jeder Verwendung des Tores die Anzahl an Kühen in jedem Stall um gleich viel modulo 4. Da die Zahlen 10, 20, 30, 40 nicht paarweise kongruent modulo 4 sind, ist es unmöglich mit dem Tor eine Situation zu erzeugen, in der in jedem Stall gleich viele Kühe modulo 4 sind. Insbesondere können niemals gleichzeitig in jedem Stall 25 Kühe sein.

Lösung zu Aufgabe 5. Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$\frac{1}{2}(x^2 + (x+y)^2 + y^2) = n.$$

Insbesondere, muss also $|x|, |y| \leq 2n$ gelten. Daher kann es nur endlich viele ganzzahlige Lösungspaare (x, y) geben.

Um zu zeigen, dass die Anzahl solcher Lösungspaare durch 6 teilbar ist, finden wir eine Abbildung, die jedes Lösungspaar auf ein anderes abbildet, und die jedes Lösungspaar erst nach sechsfacher Anwendung wieder auf sich selbst abbildet.

Behauptung: Eine solche Abbildung ist gegeben durch

$$(x, y) \longmapsto (-y, x+y).$$

Beweis: Ist (x, y) eine Lösung der Gleichung, so ist dies auch $(-y, x+y)$, da

$$\frac{1}{2}\left((-y)^2 + (-y + (x+y))^2 + (x+y)^2\right) = \frac{1}{2}(x^2 + (x+y)^2 + y^2) = n$$

gilt. Daher bildet unsere Abbildung Lösungen auf Lösungen ab. Wenden wir die Abbildung dreimal an, erhalten wir

$$(x, y) \longmapsto (-y, x+y) \longmapsto (-x-y, x) \longmapsto (-x, -y).$$

Dreimalige Anwendung der Abbildung entspricht also $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Daher entspricht die sechsmalige Anwendung der Abbildung $(x, y) \mapsto (-(-x), -(-y)) = (x, y)$, wie gewünscht.

Jetzt müssen wir nur noch überprüfen, dass alle sechs so erhaltenen Lösungspaare auch tatsächlich verschieden sind. Dies lässt sich leicht direkt nachrechnen. In allen Fällen zeig sich: Wenn eine weniger als sechsmalige Anwendung unserer Abbildung ein Paar (x, y) auf sich selbst abbildet, dann muss $x = y = 0$ gelten. Da n positiv ist, kann ein solches (x, y) aber keine Lösung zur Gleichung sein. Daher sind alle sechs erhaltenen Lösungspaare verschieden. (*Behauptung* $\square$)

Conclusio: Die so erhaltene Abbildung teilt die Menge der Lösungspaare in Teilmengen der Größe 6 ein. Daher ist die Anzahl an Lösungspaaren durch 6 teilbar, wie gewünscht.

Lösung zu Aufgabe 6. Sophie kann immer gewinnen, zum Beispiel mit folgender Gewinnstrategie. Sie schreibt das unbekannte Polynom als

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und n unbekannt sind. Als erstes erfragt sie von Emmy den Wert

$$P(1) = a_n + \cdots + a_1 + a_0.$$

Da alle Koeffizienten positiv sind, folgert sie daraus $a_i \leq P(1)$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$. Dann wählt Sophie eine natürliche Zahl N, sodass $10^N > P(1)$. Anschließend erfragt sie den Wert von $P(10^N)$. Da $10^N > P(1) \geq a_i$ für alle i gilt, hat $P(10^N)$ die Form

$$P(10^N) = a_n 00 \ldots 00 a_{n-1} 00 \ldots 00 a_1 00 \ldots 00 a_0.$$

Der Koeffizient a_i ist also gegeben durch die Ziffern an der $(i \cdot N)$-ten, $(i \cdot N + 1)$-ten, ... und $(i \cdot N + (N - 1))$-ten Stelle von $P(10^N)$. So findet Sophie $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heraus, und n ist dann einfach die größte ganze Zahl, sodass $a_n \neq 0$.

Anmerkung. Anders formuliert sind a_i die Ziffern in der Darstellung von $P(10^N)$ zur Basis 10^N. Tatsächlich hätte Sophie irgendeine ganze Zahl $b > P(1)$ wählen können und dann $P(b)$ erfragen, denn für solche b ist $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ die Darstellung von $P(b)$ zur Basis b. Der hier implizit verwendete Satz ist, dass jede natürliche Zahl für jedes ganzzahlige $b \geq 2$ eine eindeutige Darstellung zur Basis b hat.

Lösung zu Aufgabe 7. Der Trick besteht darin, die beiden Gleichungen in eine symmetrischere Form zu bringen. Die beiden Gleichungen sind equivalent zu

$$x^2 + t^3 = y^2 + z^3$$

und

$$x^2 + t^3 = y^2 + z^3 + 1.$$

Dann ist M die Anzahl der ganzzahligen Lösungstupel (x, y, z, t) der ersten Gleichung mit $0 \leq x, y, z, t \leq 10^6$ und N die analoge Anzahl für die zweite Gleichung.

Sei nun $f(a, b) := a^2 + b^3$, dann sind die beiden Gleichungen

$$f(x, t) = f(y, z)$$

und

$$f(x, t) = f(y, z) + 1.$$

Da jede Variable nur auf einer Seite vorkommt, können wir die Lösungen von $f(a, b) = n$ für jedes n gesondert zählen. Definiere dazu für jedes $n \in \mathbb{Z}$

$$F_n := \left|\left\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z},\ \ 0 \leq a, b \leq 10^6,\ \ f(a, b) = n\right\}\right|.$$

Dann gilt

$$M = F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_k^2$$

und

$$N = F_1F_0 + F_2F_1 + \cdots + F_kF_{k-1},$$

wobei k so groß gewählt ist, dass $F_l = 0$ für alle $l > k$ (also zum Beispiel $k = (10^6)^2 + (10^6)^3$). Nun gilt aber

$$M - N = \frac{1}{2}\left(F_0^2 + (F_0 + F_1)^2 + (F_1 + F_2)^2 + \cdots + (F_k + F_{k-1})^2 + F_k^2\right) \geq 0$$

mit Gleichheit dann und nur dann, wenn $0 = F_0 = F_0 + F_1 = \cdots = F_k + F_{k-1} = F_k$. Es gilt aber $F_0 > 0$ da $f(0,0) = 0$, also gilt $M > N$, wie gewünscht.

Lösung zu Aufgabe 8. Beweis durch Induktion nach n.

Induktionsbasis: $n = 1$. Jedes $2^1 \times 2^1 = 2 \times 2$-Schachbrett mit einem entfernten Feld ist bereits ein L-Stein, also gilt die zu beweisende Aussage für $n = 1$. *(Induktionsbasis □)*

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für alle n mit $1 \leq n \leq N$ für irgendein $N \geq 1$ gilt. Zu zeigen ist, dass die Aussage für $n = N + 1$ gilt.

Das gegebene $2^{N+1} \times 2^{N+1}$ Schachbrett lässt sich in vier $2^N \times 2^N$ Schachbretter zerteilen. Da ursprünglich ein Feld entfernt wurde, hat genau eines der vier kleineren Schachbretter ein fehlendes Feld. Laut Induktionsannahme existiert für dieses kleinere Schachbrett eine Parkettierung durch L-Steine.

Den anderen drei kleineren Schachbrettern fehlen keine Felder, aber wir können aus jedem der drei das Feld entfernen, das am nächsten zum Mittelpunkt des ursprünglichen Schachbrettes ist. Jetzt können wir die Induktionsannahme auf die drei Schachbretter anwenden und sie mit L-Steinen parkettieren. Die drei mittleren entfernten Felder (in der unteren Abbildung hellgrau dargestellt) formen nun den letzten L-Stein, der die Parkettierung des ursprünglichen $2^{N+1} \times 2^{N+1}$ Schachbrettes verfollständigt.

(Induktionsschritt □)

Lösung zu Aufgabe 9. Jeder Schritt invertiert eine gerade Anzahl an Feldern (8 für Reihen und Spalten und 4 für 2×2 Quadrate).

Behauptung: Invertiert man eine gerade Anzahl von Feldern, ändert sich die Anzahl der schwarzen Felder um eine gerade Zahl.

Beweis: Angenommen wir invertieren $2N$ Felder, von denen S schwarz und W weiß sind. Dann gilt

$$S + W = 2N.$$

Nach der Inversion gibt es W schwarze Felder im Bereich. Die Anzahl der schwarzen Felder hat sich also um $W - S$ geändert. Modulo 2 gilt aber

$$W - S \equiv W + S = 2N \equiv 0 \pmod 2.$$

Also ist die Änderung der Anzahl der schwarzen Felder gerade. *(Behauptung □)*

Aus der Behauptung folgt unmittelbar, dass es nach jeder Abfolge von Schritten immer eine gerade Anzahl von schwarzen Feldern gibt. Daher kann Kunibert kein Schachbrett mit 63 weißen und einem schwarzen Feld erzeugen.

Anmerkung. Dieser Beweis lässt sich elegant umformulieren: In jedes Feld schreiben wir anfangs 0, falls es weiß ist, und 1, falls es schwarz ist. Das Invertieren eines Bereiches ist dann äquivalent dazu, die Zahl in jedem Feld um 1 zu erhöhen und dann modulo 2 zu reduzieren. Das Invertieren einer Zeile, Spalte oder eines 2×2 Quadrats entspricht damit 8 beziehungsweise 4 Additionen von 1 modulo 2. Die Summe der Zahlen in den Feldern ist also invariant modulo 2, weshalb es immer gerade viele schwarze Felder geben muss.

Lösung zu Aufgabe 10. Für $n = 3$ kann Alice gewinnen, indem sie ihren Stein um ein Feld nach rechts bewegt. Dann kann Bob keinen Zug mehr machen und Alice gewinnt.

Für $n = 4$ kann Alice gewinnen, indem sie ihren Stein um zwei Felder nach rechts bewegt. Dann kann Bob keinen Zug mehr machen und Alice gewinnt auch.

Für $n = 5$ kann Bob sicher gewinnen, denn Alice kann entweder ein oder zwei Felder nach rechts ziehen. Im ersten Fall kann Bob die Gewinnstrategie ausführen, die Alice für $n = 4$ hatte. Im zweiten Fall hat Bob die Gewinnstrategie, die Alice für $n = 3$ hatte. In beiden Fällen gewinnt also Bob, egal wie Alice spielt.

Wir verallgemeinern das wie folgt. Wir nennen n eine *Gewinnposition*, wenn die Person, die zu Beginn ihres Zuges einen Streifen der Länge n vorfindet, sicher gewinnen kann. Anderenfalls nennen wir n eine *Verlustposition*. Wir definieren für $n \geq 3$

$$f_n := \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ eine Gewinnposition ist,} \\ 0 & \text{wenn } n \text{ eine Verlustposition ist.} \end{cases}$$

Aus dieser Definition folgt, dass Alice sicher gewinnen kann, wenn n eine Gewinnposition ist, und dass Bob sicher gewinnen kann, wenn n eine Verlustposition ist.

Außerdem gilt für $n \geq 3$

$$f_{n+2} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } f_{n+1} = 0 \text{ oder } f_n = 0, \\ 0 & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Die obigen Strategien für $n \in \{3, 4, 5\}$ zeigen, dass $f_3 = 1$, $f_4 = 1$, $f_5 = 0$. Verwenden wir die Formel für f_{n+2}, erhalten wir folgendes Muster:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
f_n	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1

Daraus leiten wir folgende Vermutung ab:

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \equiv 0, 1 \pmod 3, \\ 0 & \text{wenn } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Diese stimmt für $n \in \{3, 4\}$ und ist mit der Formel für f_{n+2} leicht durch Induktion zu beweisen.

Conclusio: Alice kann sicher gewinnen, wenn $n \equiv 0$ oder $n \equiv 1$ modulo 3. Bob kann sicher gewinnen, wenn $n \equiv 2$ modulo 3.

(Weitere Lösungen auf `oemo.at`*)*

Lösung zu Aufgabe 11. Emmy kann die Spalten der Tabelle eine nach der anderen zu Null reduzieren, indem sie wiederholt die folgende Prozedur ausführt;

- Hat die Spalte Einträge gleich 1, verdopple die Zeilen dieser Einträge.
- Subtrahiere 1 von allen Einträgen der Spalte, bis sie wieder einen Eintrag gleich 1 hat.

Bis alle Einträge in der Spalte gleich 1 sind, verkleinert diese Prozedur die Summe der Einträge der Spalte. Daher muss irgendwann jede Zahl in der Spalte 1 sein. An diesem Punkt kann Emmy noch einmal 1 von jedem Eintrag der Spalte abziehen und erhält eine Spalte mit lauter Nullen.

Wiederholt sie das für jede Spalte, erhält sie eine Tabelle mit lauter Nullen. (Denn das Multiplizieren einer Reihe mit 2 ändert die Spalten nicht, die schon Null sind.)

(Übersetzt nach [Lav16S, problem 8])

Lösungsidee zu Aufgabe 12. Zeige, dass die Länge des Randes der schattierten Fläche in jedem Zug abnimmt oder gleich bleibt, aber nicht zunimmt. Anfangs ist ist der Rand höchstens $7 \cdot 4 = 28$. Wären am Ende alle Felder schattiert, dann wäre die Randlänge $4 \cdot 8 = 32 > 28$. Da die Randlänge nicht wachsen kann, ist dies unmöglich.

(Übersetzt nach [Lav16S, problem 11])

Lösungsidee zu Aufgabe 13. Verwende das Konzept der *Signatur einer Permutation* aus Aufgabe 20: Wenn der fehlende Stein als unsichtbarer Stein mit der Zahl 16 dargestellt wird, dann ist jeder Spielzug eine Vertauschung von 16 mit einer Zahl aus $\{1, 2, \ldots, 15\}$.

Nehmen wir zwecks Widerspruch an, das Puzzle sei lösbar. Vertauschen wir zuerst 14 und 15 und lösen dann das Puzzle, so haben wir laut Aufgabe 20 insgesamt eine gerade Anzahl an Vertauschungen vorgenommen. Also haben wir zur Lösung des Puzzles eine ungerade Anzahl an Schritten gebraucht.

Es ist aber nicht möglich, den unsichtbaren Stein in einer ungeraden Anzahl an Schritten wieder in seine Ursprungslage zu versetzen. Das ist ein Widerspruch, also kann das Puzzle keine Lösung haben.

(Übersetzt nach [Lav16S, problem 9(b)])

Lösung zu Aufgabe 14. Die Summe der Zahlen auf der Tafel wird in jedem Schritt um 1 kleiner. Daher ist die letzte Zahl auf der Tafel

$$1 + 2 + \cdots + 100 - 99 = \frac{100 \cdot 101}{2} - 99.$$

Lösung zu Aufgabe 15. Addiert man 1 zu jeder Zahl auf der Tafel und multipliziert die Ergebnisse, erhält man eine Zahl. Diese Zahl bleibt in jedem Schritt gleich, da

$$(a + 1)(b + 1) = (ab + a + b) + 1.$$

Die letzte Zahl auf der Tafel ist daher

$$(1 + 1)(2 + 1)(3 + 1) \ldots (100 + 1) - 1 = 101! - 1.$$

Lösung zu Aufgabe 16 Angenommen die drei Zahlen auf der Tafel sind a, b, c. Da die Zahlen in Dimas Heft bis auf Umordnung gleich sind, ist das Produkt der Zahlen auf der Tafel gleich dem Produkt der Zahlen im Heft, also

$$0,97 \cdot 0,94 \cdot 1,05 \cdot abc = abc.$$

Da a, b, c laut Annahme positive ganze Zahlen sind, folgt daraus

$$0,97 \cdot 0,96 \cdot 1,05 = 1.$$

Das ist aber ein Widerspruch, wie man leicht nachrechnet, also muss Dima einen Rechenfehler gemacht haben.

Lösungsidee zu Aufgabe 17. Faktorisiere jede der Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ in Primfaktoren. Die Züge von Arthur bewirken, dass am Ende für jede Primzahl p die Exponenten von p in den Primfaktorzerlegungen von $a_1, \ldots, a_n$ monoton steigend sind. Dadurch ist die Liste der Zahlen am Ende aber bereits vollständig bestimmt.

(Vollständige Lösung in [Lav16S, problem 10])

Lösungsidee zu Aufgabe 18. Es ist egal, in welcher Reihenfolge Alice und Bob ihre Züge ausführen, da allgemein $(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b$ gilt. Da 17 eine Primzahl ist, gilt nach dem kleinen Satz von Fermat, dass $\left(\left(\left(a^2\right)^2\right)^2\right)^2 = a^{16} \equiv 1$ modulo 17 für jedes ganze a, das nicht durch 17 teilbar ist. Daher gewinnt Alice, sobald sie jede Zahl auf der Tafel viermal quadriert hat.

(Musterlösungen auf `oemo.at`)

Lösungsidee zu Aufgabe 19. Die Antwort auf (a) ist "ja": Die Perlenkette, die abwechselnd 2 schwarze und zwei grüne Perlen hat, hat bereits nach einem Schritt lauter blaue Perlen.

Für (b) und (c) ist die Antwort "nein", wie wir aus folgendem Trick sehen: Wir modellieren die drei Farben mit $0, 1, 2$ modulo 3. Das hat den bemerkenswerten Vorteil, dass modulo 3 folgendes gilt:

$$a + b + c \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a, b, c \text{ sind alle gleich oder paarweise verschieden modulo 3}$$

Hat eine Perle also zwei Nachbarn, deren Farben durch die Zahlen a und b modulo 3 dargestellt werden, so bekommt die Perle die Farbe c, sodass $a + b + c \equiv 0$ modulo 3.

Dadurch verstehen wir, wie sich in jedem Schritt die Gesamtsumme modulo 3 verändert.

Außerdem können wir, da 2016 gerade ist, getrennt die Summen der Zahlen an geraden bzw. ungeraden Stellen betrachten.

(Musterlösungen auf `oemo.at`)

Lösungsidee zu Aufgabe 20. Für jede *Permutation* (also Umordnung) $a_1, \ldots, a_n$ von $1, 2, \ldots, n$ definieren wir die Anzahl der *Inversionen* als

$$I := |\{1 \leq i < j \leq n : a_i > a_j\}|.$$

Zeige, dass sich die Anzahl I der Inversionen mit jeder Vertauschung zweier Elemente a_i und a_j in der Liste um eine ungerade Zahl ändert.

Wäre es Sophie also möglich mit einer ungeraden Anzahl an Vertauschungen wieder zu $1, 2, \ldots, n$ zurückzukehren, dann hätte $1, 2, \ldots, n$ eine ungerade Anzahl an Inversionen. Diese Permutation hat aber 0 Inversionen — ein Widerspruch. Also kann Sophie nur mit einer geraden Anzahl an Vertauschungen wieder zur Folge $1, 2, \ldots, n$ zurückzukehren.

(Vollständige Lösung in [Lav16S, problem 9(a)])

Lösungsidee zu Aufgabe 21. Die Fläche des Dreiecks, das die drei Grashüpfer bilden, bleibt mit jedem Sprung gleich. Daher können sie niemals ein größeres gleichseitiges Dreieck bilden.

Lösung zu Aufgabe 22. Definiere ein Koordinatensystem in der Ebene, sodass die vier Grashüpfer anfangs in den ganzzahligen Gitterpunkten $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ sitzen. Da die Grashüpfer auf Gitterpunkten (also Punkten mit ganzzahligen Koordinaten) starten, werden sie stets auf Gitterpunkten landen.

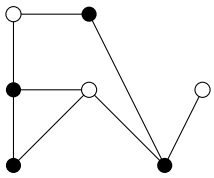
Nehmen wir nun zwecks Widerspruch an, die Grashüpfer könnten so springen, dass sie irgendwann ein größeres Quadrat bilden. Indem sie die gleiche Sprungfolge beliebig oft rückwärts ausführen, könnten sie gleichermaßen ein beliebig kleines Quadrat erzeugen. Das geht aber nicht, da sich auf Gitterpunkten kein beliebig kleines Quadrat erzeugen lässt, da alle Grashüpfer stets abstand ≤ 1 zueinander haben. Das ist ein Widerspruch, also können sie nicht so hüpfen, dass sie irgendwann ein größeres Quadrat bilden.

Lösungsidee zu Aufgabe 23. Zeige, dass man jeden verbundenen planaren Graphen schrittweise Aufgaben kann, indem man mit einem einzigen Knoten startet und in jedem Schritt entweder einen Knoten hinzufügt und mit einer Kante mit dem bestehenden planaren Graphen verbindet, oder eine Kante zwischen zwei bestehenden Knoten hinzufügt. Zeige dann, dass jeder Schritt die Summe $V - E + F$ erhält, und dass sie anfangs 2 war.

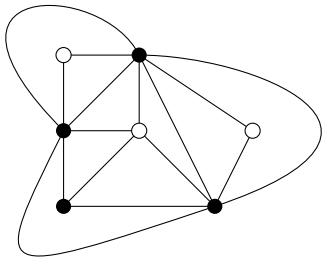
Lösungsidee zu Aufgabe 24. Diese Aufgabe folgt sofort aus Aufgabe 23, indem man den Polyeder in eine Kugel einschreibt und das Netz des Polyeders mittels *stereographischer Projektion* von der Kugel auf eine Ebene projiziert.

Lösungsidee zu Aufgabe 25. Zerlege das Gitterpolygon in Gitterdreiecke, die jeweils keinen Gitterpunkt im Inneren haben. Zeige, dass jedes solche Gitterdreieck eine Fläche von $\frac{1}{2}$ hat. Wende dann Aufgabe 23 an (Euler Charakteristik).

Lösung zu Aufgabe 26. Die Lösungsidee ist, die Gesamtzahl an Farbänderungen (summiert über alle Knoten) in Zusammenhang mit der Anzahl an Knoten (V), Kanten (E), und Gebieten (F) zu bringen, um dann Aufgabe 23 über die Euler Charakteristik anwenden zu können. Wir illustrieren das Argument an folgendem Beispiel.



Zunächst fügen wir dem planaren Graph so lange Kanten hinzu, bis alle Gebiete (inklusive des äußeren) durch genau drei Kanten und drei Knoten begrenzt sind[3]. Gilt die Aussage für diesen Graphen, gilt sie auch für den ursprünglichen Graphen, da wir die Anzahl der Farbänderungen an jedem Knoten nicht verkleinert haben. Das obige Beispiel könnte dann etwa so aussehen:

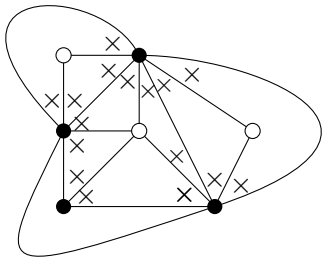


Zählen wir nun die Anzahl der Paare (e, f) auf zwei Arten, wobei e eine Kante ist, die das Gebiet f begrenzt, erhalten wir

$$2E = 3F,$$

denn jede Kante begrenzt zwei Gebiete und jedes Gebiet ist durch drei Kanten begrenzt.

Jetzt malen wir in jede Ecke jedes Gebiets ein $\times$, wenn die beiden benachbarten Kanten zu Knoten mit unterschiedlichen Farben führen:



Da jedes Gebiet drei Ecken hat, sind nun in jedem Gebiet 0 oder 2 Kreuze[4]. Sei K die Anzahl der gemalten Kreuze. Dann gilt also $K \leq 2F$. Daraus und aus $2E = 3F$ folgt nun

$$\frac{K}{V} \leq \frac{2F}{V} = \frac{4E}{3V}.$$

Mit der Eulerformel (siehe Aufgabe 23) erhalten wir

$$2 = V - E + F = V - E + \frac{2E}{3} = V - \frac{E}{3}$$

also

$$\frac{E}{3} = V - 2.$$

Setzen wir das ein, erhalten wir

$$\frac{K}{V} \leq \frac{4E}{3V} = \frac{4(V-2)}{V} < 4.$$

[3]Dies funktioniert, solange G mindestens 3 Knoten hat. Dass die zu beweisende Aussage für planare Graphen mit 2 oder weniger Knoten gilt, ist leicht direkt zu überprüfen.

[4]Dies ist leicht zu überprüfen, indem man alle möglichen Dreiecke mit gefärbten Ecken durchgeht.

Daher muss es einen Knoten v geben, dessen Nachbarn im Uhrzeigersinn höchstens dreimal die Farbe wechseln. Die Anzahl der Farbwechsel muss aber gerade sein, da man nach einer vollen Umdrehung wieder zur gleichen Farbe zurückkehrt. Daher wechseln die Nachbarn von v im Uhrzeigersinn höchstens zweimal die Farbe, wie gewünscht.

Lösung zu Aufgabe 27. Diese Aufgabe lösen wir mithilfe der folgenden Invariante. Sei G ein Graph. Eine *n-Färbung* von G ist eine Abbildung, die jedem Knoten von G eine der Farben $1, 2, \ldots, n$ zuweist, sodass folgende Bedingung erfüllt ist: sind zwei Knoten v und w mit einer Kante verbunden, so haben sie unterschiedliche Farben. Die *chromatische Zahl von G* ist

$$\chi(G) := \min\{n \in \mathbb{N} : \text{ Es existiert eine } n\text{-Färbung von } G\}.$$

Zum Beispiel prüft man leicht nach, dass der Graph C_n, dessen Knoten und Kanten die Eckpunkte bzw. Seiten eines regelmäßigen n-Ecks sind, $\chi(C_n) = 2$ hat, wenn n gerade ist, und $\chi(C_n) = 3$, wenn n ungerade ist. Außerdem gilt $\chi(G) = 1$ dann und nur dann, wenn G keine Kanten hat.

Modellierung der Aufgabe mit Graphentheorie: Wir interpretieren die Aufgabe nun graphentheoretisch, indem wir Imonen als Knoten des Graphs G auffassen, wobei zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn die entsprechenden Imonen verschränkt sind. Somit können wir jeder Konfiguration G von Imonen eine chromatische Zahl $\chi(G)$ zuweisen. Dabei ist die $\chi(G) = 1$ genau dann, wenn keine Imonen verschränkt sind.

Es reicht also, eine Reihe von Operationen zu definieren, die $\chi(G)$ strikt sinken lassen, da dann irgendwann $\chi(G) = 1$ gelten muss. Ein solches Prozedere ist wie folgt definiert.

- Führe zunächst Operation (i) so oft aus, bis nur noch Imonen mit gerader Verschränkungszahl übrig sind.
- Wähle nun für den erhaltenen Graph G der Imonen eine $\chi(G)$-Färbung und führe Operation (ii) aus (Verdoppelung der Imonen), wobei auch die Farben mitkopiert werden. Sei G' der Graph der Imonen nach dieser Operation. Die Knoten von G' sind nun zwei Kopien der Knoten von G, die wir die *oberen* und *unteren* nennen.

  Da in G' jeder Knoten ungerade viele Nachbarn hat, können wir einen oberen Knoten mit Farbe 1 entfernen[5]. Da keine zwei oberen Knoten mit Farbe 1 benachbart sind, haben alle übrigen oberen Knoten mit Farbe 1 immer noch ungerade viele Nachbarn. Daher können wir durch wiederholte Anwendung von (i) alle oberen Knoten mit Farbe 1 löschen.

  Ähnlichermaßen können wir alle unteren Knoten mit Farbe 2 löschen.

  Der so erhaltene Graph G'' hat eine $(\chi(G) - 1)$-Färbung, indem wir die Farben 1 und 2 gleichsetzen. Daher ist $\chi(G'') \leq \chi(G) - 1$, wie gewünscht.

Diese zwei Schritte können nun wiederholt werden, bis $\chi(G) = 1$ gilt, also keine Imonen mehr verschränkt sind.

Quellen

[AAC10] Andreescu, Titu, Dorin Andrica, Ion Cucurezeanu. *An Introduction to Diophantine Equations: A Problem-Based Approach.* Springer, 2010.

[Eng98] Engel, Arthur. *Problem-Solving Strategies.* Springer, 1998.

[5] Ein solcher Knoten existiert, denn ansonsten hätte G eine $(\chi(G) - 1)$-Färbung.

[Lav16] Lavrov, Misha. Writing Proofs, The Invariance Principle. *Western PA ARML Practice*, 28. Februar 2016. URL: https://www.math.cmu.edu/~cargue/arml/archive/15-16/proofs-02-28-16.pdf, zuletzt aufgerufen am 10. September 2023.

[Lav16S] Lavrov, Misha. Solutions to: Writing Proofs, The Invariance Principle. *Western PA ARML Practice*, 28. Februar 2016. URL: https://www.math.cmu.edu/~cargue/arml/archive/15-16/proofs-02-28-16-solutions.pdf, zuletzt aufgerufen am 11. September 2023.

[Sah21] Sahasrabudhe, Julian. Part II Graph Theory, Example Sheet 2. *University of Cambridge*, January 2021. URL: https://www.dpmms.cam.ac.uk/study/II/Graphs/2020-2021/example-sheets-2.pdf, zuletzt aufgerufen am 10. September 2023.

[Zha07] Zhao, J. "Integer Polynomials", MOP 2007 Black Group (June 29, 2007). https://yufeizhao.com/olympiad/intpoly.pdf, zuletzt aufgerufen am 4. Oktober 2023.