Im Folgenden sind mit *Nullstellen eines Polynoms* immer alle komplexen Nullstellen gemeint. Zum Beispiel sind die Nullstellen des Polynoms $(X^2+1)(X-1)$ die komplexen Zahlen $\{1, i, -i\}$.

Mit der *konvexen Hülle einer Menge von komplexen Zahlen* ist die konvexe Hülle der entsprechenden Punkte in der komplexen Zahlenebene gemeint.

Aufgaben Algebra

Aufgabe 1. Sei $n \geq 2$ eine fixe positive ganze Zahl und seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen mit $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^n - 1$. Finde (mit Beweis) den kleinstmöglichen Wert von

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1+a_1} + \frac{a_3}{1+a_1+a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 2. Seien $n < m$ positive ganze Zahlen und $a_1, \ldots, a_m$ paarweise verschiedene reelle Zahlen. Finde (mit Beweis) alle Polynome P mit reellen Koeffizienten und Grad höchstens n, sodass

$$|P(a_i) - P(a_j)| = |a_i - a_j|$$

für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt.

Aufgabe 3. Man bestimme alle Polynome $P(x)$ mit reellen Koeffizienten, die die Gleichung

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

für alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen mit $ab + bc + ca = 0$ erfüllen.

Aufgabe 4. Seien A, B, C teilerfremde nicht-konstante Polynome mit komplexen Koeffizienten und

$$A + B = C.$$

Zeige, dass der Grad von jedem der Polynome A, B, C strikt kleiner ist als die Anzahl der verschiedenen Nullstellen von ABC.

Anmerkung: Zwei Polynome ungleich 0 mit komplexen Koeffizienten sind genau dann teilerfremd, wenn sie keine gemeinsame Nullstelle haben.

Aufgabe 5 (Fermats letzter Satz für Polynome)**.** Seien P, Q, R teilerfremde nicht-konstante Polynome mit komplexen Koeffizienten und a, b, c positive ganze Zahlen mit

$$P^a + Q^b = R^c.$$

Zeige, dass

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$$

gilt.

Leite daraus einen *"Fermats letzten Satz für Polynome"* her.

Aufgabe 6 (Satz von Gauß–Lucas)**.** Sei P ein nicht-konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten. Man beweise, dass jede Nullstelle der Ableitung P' in der konvexen Hülle der Nullstellen von P enthalten ist.

Aufgabe 7 (Satz von Lucas)**.** Seien $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und p eine Primzahl. Zeige, dass

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{l} \binom{m_i}{n_i} \mod p$$

gilt, wobei $m = m_l m_{l-1} \cdots m_1 m_0$ und $n = n_l n_{l-1} \cdots n_1 n_0$ die Darstellungen von m und n zur Basis p sind.

Beispiel: $m = 5$ und $n = 4$ haben zur Basis $p = 3$ die Darstellungen $m = 12$ und $n = 11$. Der Satz von Lucas sagt also, dass

$$\binom{5}{4} \equiv \binom{1}{1}\binom{2}{1} \mod 3$$

gilt.

Quellen

[1] Canadian Mathematical Olympiad, 2021, Problem 2.

Aufgabe 1

[2] Đukić, Dušan. *IMOmath, Polynomials, Problems.* https://imomath.com/index.cgi?page=polynomialsProblems. Zuletzt aufgerufen am 18. Februar 2024.

Aufgabe 3,4,5

[3] Greece National Olympiad, 2018, Problem 3.

Aufgabe 2

[4] IMO 2004, Aufgabe 2.

Aufgabe 3

[5] Wikipedia / Allgemeinwissen.

Aufgabe 6,7