Lösungsstrategien

ÖMO Vorbereitungskurs zum Bundeswettbewerb – Finale
Raach, Mai 2024

Format. 17 Aufgaben größtenteils auf IMO/MEMO Niveau, die im experimentellen Format "Problemlösungsstrategien" bearbeitet wurden. Das Format war dabei folgendermaßen: Eine Aufgabe wird auf die Tafel geschrieben und ein Timer auf 5 Minuten gestellt. Danach werden die gefundenen Ideen und Perspektiven ausgetauscht, besprochen, und anschließend direkt zur nächsten Aufgabe weitergegangen. Für den Fall, dass eine Aufgabe manchen schon bekannt oder zu leicht ist, steht stets auch eine "Backupaufgabe" auf der Tafel, die deutlich schwieriger sein sollte, und mit der man sich alternativ beschäftigen kann. Diese Aufgaben sind mit Stern markiert.

Aufgabe 1. Finde alle $x, y, z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3.$$

[AAC10, §1.6, Example 1]

Aufgabe 2. Finde alle $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit

$$2^x - 1 = xy.$$

(Putnam, zit. n. [AAC10, §1.6, Example 2])

Aufgabe 3. Seien n und k teilerfremde positive ganze Zahlen mit $k < n$. Jede Zahl der Menge $M = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ ist entweder blau oder weiß gefärbt. Weiters gilt:

- Für jedes $i \in M$ haben i und $n - i$ die gleiche Farbe.
- Für jedes $i \in M \setminus \{k\}$ haben i und $|i - k|$ die gleiche Farbe.

Beweise, dass alle Elemente in M die gleiche Farbe haben.

(IMO 1985, zit. n. [Che92])

Aufgabe 4. Gegeben sind m Punkte in der Ebene, wovon manche durch gerade Strecken verbunden sind. Jeder Punkt ist mit genau l Strecken verbunden. Finde alle möglichen Werte von l.

(Moskau 1960, zit. n. [Che92])

Aufgabe 5. Sei

$$A \subset \{0, 1, 2, \ldots, 5^n\}, \qquad |A| = 4n + 2$$

Zeige, dass es $a, b, c \in A$ gibt mit $a < b < c$ und $c + 2a > 3b$.

(IMO SL 2021 A1)

Aufgabe 6 (3 Grashüpfer)**.** In einer Ebene sitzen drei Grashüpfer und bilden ein gleichseitiges Dreieck. In jeden Zug kann ein Grashüpfer über einen anderen springen, wobei seine Position an der des anderen reflektiert wird. Können die Grashüpfer so springen, dass sie irgendwann ein größeres regelmäßiges Dreieck bilden? Beweise deine Antwort.

Aufgabe 7 (4 Grashüpfer)**.** In einer Ebene sitzen vier Grashüpfer und bilden ein Quadrat. In jeden Zug kann ein Grashüpfer über einen anderen springen, wobei seine Position an der des anderen reflektiert wird. Können die Grashüpfer so springen, dass sie irgendwann ein größeres Quadrat bilden? Beweise deine Antwort.

Aufgabe 8. Finde alle ganzen Zahlen $n \geq 1$, für die es positive ganze Zahlen a, b gibt, sodass $p^3 \nmid a^2 + b + 3$ für jede Primzahl p gilt und

$$\frac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3} = n.$$

(IMO SL 2021 N1)

Aufgabe 9. Sei $S \subset \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $|S| = \infty$, sodass es paarweise verschiedene $a, b, c, d \in S$ mit $gcd(a, b) \neq gcd(c, d)$ gibt. Beweise, dass es paarweise verschiedene $x, y, z \in S$ mit

$$gcd(x, y) = gcd(y, z) \neq gcd(x, z)$$

gibt. *(IMO SL 2021 C1)*

Aufgabe 10. Finde die Anzahl an Permutationen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von $1, 2, \ldots, n$, sodass

$$a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \cdots \leq na_n.$$

(IMO SL 2020 C1)

Aufgabe 11. Man bestimme alle Polynome $P(x)$ mit reellen Koeffizienten, die die Gleichung

$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c)$$

für alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen mit $ab + bc + ca = 0$ erfüllen.

(IMO 2004, Aufgabe 2)

Aufgabe 12. Sei n eine positive ganze Zahl. Man zeige, dass man in einem regelmäßigen $6n$-Eck derart 3n Diagonalen mit paarweise verschiedenen Eckpunkten einzeichnen und die gezeichneten Diagonalen in n Tripel aufteilen kann, dass

- die Diagonalen in jedem Tripel einander in einem inneren Punkt des Polygons schneiden und
- alle diese n Schnittpunkte verschieden sind.

(MEMO 2021, Team Aufgabe 4)

Aufgabe 13. Gegeben sind n Münzen mit möglicherweise verschiedenen Wahrscheinlichkeiten, Kopf oder Zahl zu werfen. Gegeben ist weiters: Wirft man jede Münze genau einmal, so ist es gleich wahrscheinlich, dass wir gerade bzw. ungerade oft Kopf geworfen haben.

Folgt daraus, dass mindestens eine der Münzen fair sein muss?

(VMC 2024, Individual Aufgabe 3)

$*$ **Aufgabe 14.** Sei N eine positive ganze Zahl, sodass die Summe der Quadrate aller positiven Teiler von N den Wert $N(N + 3)$ hat.

Zeige, dass $i, j \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $N = F_i \cdot F_j$ gilt, wobei $\{F_i\}$ die Fibonacci-Zahlen sind mit $F_1 = 1, F_2 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

(MEMO 2019, Team Aufgabe 8)

Aufgabe 15. Sei G ein planarer Graph, in dem jeder Knoten entweder rot oder blau gefärbt ist. Man beweise, dass es einen Knoten v mit folgender Eigenschaft gibt: Betrachtet man die Nachbarn von v im Urzeigersinn, so ändert sich die Farbe höchstens zweimal.

[Sah21, exercise 7]

$*$ **Aufgabe 16.** Finde ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Z}[X]$, das reduzibel modulo jede Primzahl p ist.

Aufgabe 17. In einer 8×8 Tabelle sind sieben Felder schattiert. In jedem Zug schattieren wir jedes Feld, das zu Beginn des Zuges mindestens zwei schattierte Nachbarfelder hatte (horizontal oder vertikal). Beweise, dass dieser Prozess nicht damit enden kann, dass alle Felder schattiert sind.

[Lav16, problem 11]

$*$ **Aufgabe 18.**

(a) Löse die Gleichung
$$x^4 - 17y^4 = 2z^2$$
in $\mathbb{Q}$.

(b) Sei $p \equiv 1 \bmod 8$ eine Primzahl und $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eine quadratfreie Zahl. Seien $x, y, z \in \mathbb{Q}$ nicht alle Null mit
$$x^4 - py^4 = dz^2.$$
Beweise, dass d eine vierte Potenz modulo p ist.

[Ver24, exercise 2]

Quellen

[AAC10] Andreescu, Titu, Dorin Andrica, and Ion Cucurezeanu. An Introduction to Diophantine Equations: A Problem-Based Approach. Springer Science & Business Media, 2010.

[Che92] Cheung, Pak-Hong. "Problem-Solving Strategies - Research Findings from Mathematics Olympiads." Mathematical Medley of the Singapore Mathematical Society 20, no. 2 (1992): 79–98. URL: https://sms.math.nus.edu.sg/volume-20-1992/

[Lav16] Lavrov, Misha. Writing Proofs, The Invariance Principle. *Western PA ARML Practice*, 28. Februar 2016. URL: https://www.math.cmu.edu/~cargue/arml/archive/15-16/proofs-02-28-16.pdf, zuletzt aufgerufen am 10. September 2023.

[Sah21] Sahasrabudhe, Julian. Part II Graph Theory, Example Sheet 2. *University of Cambridge*, January 2021. URL: https://www.dpmms.cam.ac.uk/study/II/Graphs/2020-2021/example-sheets-2.pdf, zuletzt aufgerufen am 10. September 2023.

[Ver24] Verzobio, Matteo. Graduate Course on Elliptic Curves, Example Sheet 2. *Institute of Science and Technology Austria*, May 2024. URL: https://sites.google.com/view/matteoverzobio/teaching