Modulo zwei und drei

Daniel Holmes

Aufgabe 1. Gegeben sei ein 2×2026-Brett. Ist die Anzahl der Möglichkeiten, das Brett mit Dominosteinen der Größe 1×2 zu überdecken, gerade oder ungerade?

Aufgabe 2. Gegeben sind drei Stapel mit 8, 4 bzw. 0 Steinen. In jedem Zug nimmt Alice zwei Steine von einem Stapel ihrer Wahl und legt je einen davon auf die beiden anderen Stapel. Kann Alice jemals erreichen, dass auf jedem Stapel gleich viele Steine liegen?

Aufgabe 3. Finde alle ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der folgenden Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

Aufgabe 4. Gegeben sei ein 8×8-Brett, dessen Feld in der oberen linken Ecke entfernt wurde. Ist es möglich, das verbleibende Brett mit Steinen der Form 1×3 zu überdecken?

Aufgabe 5. Auf jedem Feld eines $n \times n$-Bretts befindet sich eine Lampe, wobei anfangs alle Lampen eingeschaltet sind. In jedem Zug wählt Bob zwei verschiedene Spalten und zwei verschiedene Zeilen aus und schaltet die vier Lampen an deren Schnittpunkten um. Bestimme genau, welche Konfigurationen von ein- und ausgeschalteten Lampen durch eine Abfolge solcher Schritte erreicht werden können.

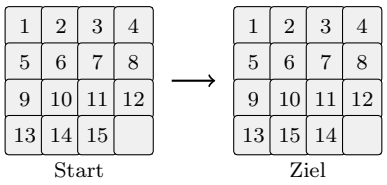
Aufgabe 6 (ÖMO BWF 2017, Aufgabe 2)**.** Auf einer Kette sind 2016 Perlen im Kreis angeordnet, von denen jede eine der Farben schwarz, blau oder grün hat. In jedem Schritt wird gleichzeitig jede Perle durch eine neue Perle ersetzt, wobei sich die Farbe der neuen Perle wie folgt bestimmt: Falls die beiden ursprünglichen Nachbarn dieselbe Farbe hatten, hat die neue Perle deren Farbe. Falls die Nachbarn zwei verschiedene Farben hatten, hat die neue Perle die dritte Farbe.

(a) Gibt es eine solche Kette, auf der die Hälfte der Perlen schwarz und die andere Hälfte grün ist, aus der man mit solchen Schritten eine Kette aus lauter blauen Perlen erhalten kann?

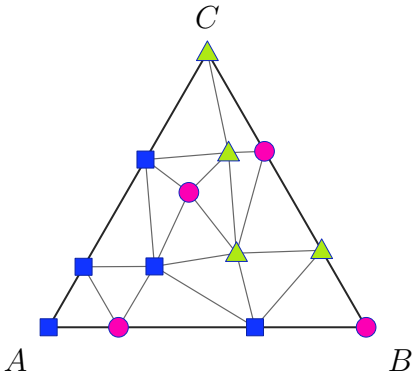
(b) Gibt es eine solche Kette, auf der tausend Perlen schwarz und die übrigen grün sind, aus der man mit solchen Schritten eine Kette aus lauter blauen Perlen erhalten kann?

(c) Ist es möglich, von einer Kette, die genau zwei benachbarte schwarze und sonst nur blaue Perlen enthält, mit solchen Schritten zu einer Kette zu kommen, die genau eine grüne und sonst nur blaue Perlen enthält?

Aufgabe 7 (15-Puzzle)**.** Auf einem 4×4-Brett sind Steine mit den Beschriftungen $1, 2, \ldots, 15$ aufgelegt, sodass genau das Feld unten rechts frei bleibt (siehe abgebildete Startposition rechts). In jedem Schritt wird ein Stein, der mit dem leeren Feld eine Kante gemeinsam hat, auf das leere Feld geschoben. Ist es möglich, mit einer Folge solcher Schritte die Zielposition (siehe rechts) zu erreichen?



Aufgabe 8 (Sperners Lemma)**.** Gegeben sei ein trianguliertes Dreieck ABC, wobei jeder Eckpunkt jedes Dreiecks der Triangulierung entweder pink, grün oder blau gefärbt ist. Weiters liegen auf der Seite AB keine grünen Eckpunkte, auf der Seite BC keine blauen Eckpunkte und auf der Seite CA keine pinken Eckpunkte. Beweise, dass die Triangulierung ein Dreieck enthält, dessen Eckpunkte paarweise verschieden gefärbt sind.



Aufgabe 9. In der Stadt *Oddtown* leben n Menschen. Weiters gibt es m Vereine, wobei jeder Verein eine ungerade Anzahl an Mitgliedern hat und zwei verschiedene Vereine stets eine gerade Anzahl an gemeinsamen Mitgliedern haben. Beweise, dass $m \leq n$ gilt.

Aufgabe 10. Zeige, dass jede Anordnung von neun Punkten in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten drei Punkte enthält, deren Schwerpunkt ebenfalls ganzzahlige Koordinaten hat.

Bonusfrage: Was hat diese Aufgabe mit dem Spiel *Set* zu tun?

Weiterführende Literatur.

- B. Sudakov und P. Vieira, *Two remarks on eventown and oddtown problems.* SIAM J. Discrete Math. **32** (2018), no. 1, 280–295.
- S.W. Golomb, *Checker boards and polyominoes.* Amer. Math. Monthly **61** (1954), 675–682.
- Zu Sperners Lemma und dem 15-Puzzle siehe Wikipedia.